MAI 1 – 9. cvičení - příklady

Derivace funkce a užití derivace.

1. Výpočet limit funkcí užitím l´ Hospitalova pravidla:

   Vypočítejte limity:

   a) limity „$\frac{0}{0}$“ nebo „$\frac{\infty}{\infty}$“ :

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln 3x}{\sqrt{x}};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x};\quad \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)};$$

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{\sin x^2};\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-arctg\, x}{x^3};$$

   b) limity „$0\cdot\infty$“ :

   $$\lim_{x\to 0+} x^2\ln x;\quad \lim_{x\to 0+} x^a\ln x\ (a>0);\quad \lim_{x\to+\infty} x\ln(1-\frac{2}{x});\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\arcsin\frac{1}{x};\quad \lim_{x\to-\infty} x^2e^x$$

   $$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}};\quad \lim_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right)\cdot\left(\log\left(n^2-4\right)-2\log n\right);$$

   c) limity „$\infty-\infty$“ :

   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{\sin x}\right);\quad \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right);$$

   d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\ln x}};\quad \lim_{x\to 0+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{x}};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x;\quad \lim_{x\to 0}\left(e^x-2x\right)^{\frac{1}{2x}};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2};$$

   $$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Dopočítávání derivací ve „špatných“ bodech – cvičení na užití (či neužití) věty 8.24 (z přednášky 8.) : (někdy je „dopočítávání“ derivací užitím definice i jednodušší než počítat limitu derivace v bodě, kde potřebujeme derivaci „dopočítat“)

   a) Spočítejte derivaci $f'(1)$, případně jednostranné derivace $f'_+(1)$ nebo $f'_-(1)$ funkce

   $$f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

   b) Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x\in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$ (a tyto derivace spočítejte), když:

   i) Funkce f je definována: $f(x)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$, pokud $x\neq 0$ a $f(0)=0$.

   ii) Funkce f je definována: $f(x)=arctg\frac{1}{x^2}$, pokud $x\neq 0$ a $f(0)=\frac{\pi}{2}$.

   iii) Je dána funkce f předpisem : $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ *pro* $x\neq 0$, $f(0)=\frac{1}{2}$.

c) Je dána funkce $f(x)=\cos\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$.

Najděte definiční obor funkce f . Vyšetřete spojitost funkce f v D_f . Dále zjistěte, pro která $x \in D_f$ existuje derivace $f'(x)$, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

3. Vyšetřování extrémů funkce (globálních i lokálních) a průběhu funkce:

a) vyšetřete lokální a globální extrémy funkce

i) $f(x)=\dfrac{e^{|x|}}{x-1}$; ii) $f(x)=\exp(-\sqrt{|x^2-1|})$;

b) vyšetřete průběh funkce ($\exp(x)=e^x$):

$$f(x) := \frac{x}{x^2-1};\ \frac{|x|}{x^2-1};\ \left|\frac{x}{x^2-1}\right|;\ \frac{x^3}{x^2-1};\ \frac{1}{x}+4x^2;\ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$$

$$f(x):=\ x^2e^{-x};\ xe^{-x^2};\ \frac{e^{-x}}{2-x};\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}};\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x;\ (x-2)\cdot e^{-\frac{1}{x}}\ \text{nebo}\ |x-2|\cdot e^{-\frac{1}{x}};$$

$$\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right);\ |x|e^{-|x-1|};$$

$$f(x):=\ x+\sin x;\ x-2\,arctg\,x;\ arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right);\ arctg\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\ \arcsin\frac{2x}{1+x^2};$$

$$f(x):=x\ln x;\ x-\ln(x+1);\ \frac{x}{\ln x}.$$

4. Několik „slovních“ příkladů na vyšetřování extrémů funkcí:
(můžete zkusit, pokud nebudete mít nic jiného na práci a bude se vám chtít toto řešit)

1. Na grafu funkce $y=x^2$ najděte bod, nejbližší bodu $A[6,3]$.
2. Najděte válec daného objemu s nejmenším povrchem.
3. Jaké čtverce v rozích čtvercového papíru máme vystřihnout, abychom složili krabičku (bez víka) maximálního objemu?
4. Do koule daného poloměru R vepište válec maximálního objemu (nebo s maximálním povrchem).
5. Jaký maximální objem může mít kužel, je-li dána jeho strana?
6. Do daného kuželu vepište válec (tak, že základna válce je část základny kuželu) maximálního objemu.
7. Dešťová kapka s počáteční hmotností m_0 padá volným pádem (z dostatečné výšky) a přitom se vypařuje – hmotnost kapky v čase t je dána vztahem $m(t)=m_0-kt$, $k>0$. Kdy bude mít kapka největší kinetickou energii?

8*. V rovině je dán bod $A\ [a,b]$, $a>0$, $b>0$. Kdy bude mít pravoúhlý trojúhelník OPQ (O je počátek s.s., P leží na ose x, Q leží na ose y a bod A je bodem přepony PQ) nejmenší obsah?

9*. Z chodby o šířce a kolmo odbočuje chodba o šířce b. S jak dlouhou tyčí (zanedbatelného průřezu, nesenou vodorovně) je možné zatočit z chodby o šířce a do chodby o šířce b ?